

G. Knoblich.

EINE VEKTORMULTIPLIKATION
ÜBER GRUPPEN

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades

bei der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Johannes Gutenberg-Universität
zu Mainz

Gerhard Knoblich
geboren in Stromberg/Hunsrück

M a i n z 1955

Mit Genehmigung der Fakultät zum Druck gekürzt.
Gesamtarbeit liegt in der Universitätsbibliothek vor.

Dekan: Prof. Dr. H. Rohrbach

1. Berichterstatter: Privatdozent Dr. F. Wever

2. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Köthe

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Juli 1955

Datum des Diploms 14. Juli 1955

Einleitung.

§ 1. Es sei G eine Gruppe und k eine natürliche Zahl.

Dann sollen alle geordneten k -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ von Elementen $\alpha_k \in G$ Vektoren über G genannt werden.

Die α_k heißen Komponenten von α , die Menge aller α der k -dimensionale Vektorraum über G . Das Produkt zweier Vektoren $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ und $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ werde durch

$$(1) \quad \alpha \cdot \beta = (\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2, \dots, \alpha_k \beta_k)$$

definiert. Die Vektoren des k -dimensionalen Vektorraums bilden dann eine Gruppe G^k , die dem k -fachen direkten Produkt von G isomorph ist.

Ist θ ein Homomorphismus von G , so wird seine Wirkung auf einen Vektor α durch

$$(2) \quad \theta \alpha = (\theta \alpha_1, \theta \alpha_2, \dots, \theta \alpha_k)$$

erklärt.

Die von den Komponenten eines Vektors α erzeugte Untergruppe von G wird mit $\{\alpha\}$ bezeichnet. Sie soll die vom Vektor α erzeugte Untergruppe heißen. Es gilt $\theta\{\alpha\} = \{\theta\alpha\}$.

Es sei

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{k1} \\ - & - & \dots & - \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{km} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

eine Matrix, deren Elemente einer Gruppe G angehören. Die Zeilenvektoren seien mit $\alpha_v = (a_{1v}, a_{2v}, \dots, a_{kv})$, $v = 1, 2, \dots, n$ und die Spaltenvektoren mit $f_\kappa = (a_{\kappa 1}, a_{\kappa 2}, \dots, a_{\kappa n})$, $\kappa = 1, 2, \dots, k$ bezeichnet. Sowohl die α_v wie die f_κ werden als Vektoren über G aufgefasst, $H_\kappa = \{f_\kappa\}$ heiße die κ -te Spalten-
gruppe.

Die von den Zeilenvektoren erzeugten Gruppen werden hier nicht beachtet, dafür aber die von den Zeilen als Elemente in G^k erzeugte Gruppe, die Untergruppe von G^k ist.

Definition: Die von den Zeilenvektoren $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ erzeugte Gruppe $A = \{\alpha\}$ heiße die von der Matrix α erzeugte Gruppe.

Aus der Definition folgt, dass A eine Untergruppe von G^k ist. Es folgt weiter sofort, dass die Gruppen H_κ Faktorgruppen von A sind. Es sei σ_κ ein Operator mit $\sigma_\kappa a_{\lambda v} = 1$ für $\kappa \neq \lambda$ und $\sigma_\kappa a_{\kappa v} = a_{\kappa v}$. Dann ist σ_κ ein Homomorphismus von A und $\sigma_\kappa A = H_\kappa$.

Die Erzeugung einer Gruppe $A = \{\alpha\}$ durch die Matrix α mit Elementen aus G soll an einem Beispiel erläutert werden. Es sei $G = \mathcal{S}_4$ die symmetrische Gruppe der Ordnung 24. Die Matrix

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} (1234) & (123) \\ (123) & (12) \end{pmatrix}$$

erzeugt eine Gruppe A_1 , die direktes Produkt der beiden Spaltengruppen $H_1 \cong \sigma_4$ und $H_2 \cong \sigma_3$ ist.

Dagegen erzeugt

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} (1234), & (12) \\ (123), & (123) \end{pmatrix}$$

nur eine Gruppe $A_2 \cong \sigma_4$, die der ersten Spaltengruppe isomorph ist.

Die Matrix

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} (1234), & (12) \\ (12), & (1234) \end{pmatrix}$$

erzeugt eine Gruppe $A_3 = \{\alpha_3\}$, für die beide Spaltengruppen $H_1 \cong H_2 \cong \sigma_4$ sind, ist aber nicht das direkte Produkt von H_1 und H_2 . A_3 enthält als Normalteiler das direkte Produkt $\mathcal{W}_4 \times \mathcal{W}_4$ der Kleinschen Vierergruppe, weiter ist $\{\alpha_3\} / \mathcal{W}_4 \times \mathcal{W}_4 \cong \sigma_3$. A_3 ist also eine Gruppe der Ordnung 96.

Die Untersuchung von durch Matrizen erzeugten Gruppen soll Gegenstand dieser Arbeit sein. Es treten dabei Fragen auf, die bei kommutativer Multiplikation im wesentlichen auf den Rang von α führen. In diesem Sinne könnte man die Matrix α_1 vom Range 2, die Matrix α_2 vom Range 1 nennen. Die Konstruktion der Gruppe A_3 zeigt jedoch, dass hier die Verhältnisse weniger einfach zu übersehen sind.

Ziel der Untersuchungen soll es sein, Kenntnisse über die Rolle der Spaltengruppen bei der Erzeugung von $A = \{\alpha\}$ zu gewinnen. Schliesslich sollen Matrizen untersucht werden, die in bestimmter Weise über G gebildet werden und dadurch Gruppen $\{\alpha\}$ erzeugen, die Aussagen über die Gruppe G selbst zulassen.

I. Die Erzeugung einer Gruppe durch eine Matrix.

§ 2. Es sollen zunächst Matrizen mit zwei Spalten betrachtet werden. Die von einer solchen Matrix α erzeugten Gruppen $A = \{\alpha\}$ sind dann Untergruppen von $G^2 \cong G \times G$

Es sei

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_m & b_m \end{pmatrix}$$

eine Matrix, deren Zeilen $\alpha_v = (a_v, b_v)$ Vektoren über einer Gruppe G sein sollen. Die Spaltenvektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{erzeugen die Gruppen}$$

$H_1 = \{f_1\}$ und $H_2 = \{f_2\}$, die Untergruppen von G sind.

Es sei f_n die freie Gruppe aus n Erzeugenden und $\mathcal{R}_n(H_\mu)$ die Relationennormalteiler der Spaltengruppen H_μ , $\mu = 1, 2$,

also

$$H_\mu \cong f_\mu / \mathcal{R}_\mu(f_\mu), \quad \mu = 1, 2.$$

Allgemein sollen mit grossen deutschen Buchstaben freie Gruppen, deren Untergruppen oder beliebige Komplexe einer freien Gruppe bezeichnet werden. Grosse lateinische Buchstaben werden für Gruppen verwendet, die aus einer freien Gruppe durch Hinzufügung von Relationen entstehen.

Satz 1: Es sei $\alpha = (f_1, f_2)$ eine Matrix mit n Zeilen und zwei Spalten. Dann ist die Relationengruppe $\mathcal{R}_n(\alpha)$ der von α erzeugten Gruppe A gleich dem Durchschnitt der Relationengruppen der Spaltengruppen:

$$\mathcal{R}_n(\alpha) = \mathcal{R}_n(f_1) \cap \mathcal{R}_n(f_2).$$

Beweis: Der Relationennormalteiler $\mathcal{R}_n(\alpha)$ von $A = \{\alpha\}$ zu $A \cong f_n / \mathcal{R}_n(\alpha)$ besteht aus allen Worten

$r(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in den Erzeugenden $x_1, x_2, \dots, x_n$ von f_n , welche bei der Abbildung $x_i \rightarrow \alpha_i$ auf das Einheitselement $(1, 1)$ von $\{\alpha\}$ abgebildet werden. Sei

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Funktion in $x_1, x_2, \dots, x_n$, dann ist im Falle einer Abbildung $x_i \rightarrow \alpha_i$ die

Funktion $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ genau dann gleich $(1, 1)$, wenn $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(b_1, b_2, \dots, b_n) = 1$ ist.

Es muss demnach sowohl $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R}_n(f_1)$ als auch $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R}_n(f_2)$ sein.

Von Bedeutung für die Struktur der Gruppe $A = \{ \alpha \}$ sind die Elemente, bei denen eine Komponente das Einheitsselement ist. Es sei $r_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Relation aus $\mathcal{R}_n(f_1)$, die aber nicht in $\mathcal{R}_n(f_2)$ enthalten ist. Dann wird für $x_i \rightarrow a_i$:

$$r_1(a_1, a_2, \dots, a_n) = (r_1(a_1, a_2, \dots, a_n), r_1(b_1, b_2, \dots, b_n)) = (1, r_1(b_1, b_2, \dots, b_n)).$$

Die zweite Komponente ist ein Ausdruck in den b_i , liegt folglich in H_2 . Die Abbildung $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (b_1, b_2, \dots, b_n)$ lässt demnach $\mathcal{R}_n(f_1)$ einer Untergruppe N_2 von H_2 entsprechen. Dabei werden alle Worte $r(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R}_n(f_1)$ auf das Einheitsselement abgebildet, die gleichzeitig Relationen aus $\mathcal{R}_n(f_2)$ sind. Es ist daher

$$(3) \quad \mathcal{R}_n(f_1) / \mathcal{R}_n(f_1) \cap \mathcal{R}_n(f_2) \cong N_2 \subseteq H_2$$

und entsprechend

$$(4) \quad \mathcal{R}_n(f_2) / \mathcal{R}_n(f_1) \cap \mathcal{R}_n(f_2) \cong N_1 \subseteq H_1.$$

Die Untergruppe N_2 ist gleichzeitig eine Untergruppe von H_2 und in der Form $(1, b_i)$, $b_i \in N_2$ eine Untergruppe von A , und zwar die Menge aller Elemente, deren erste Komponente 1 ist. Wegen

$$\alpha(1, b')\alpha^{-1} = (a, b)(1, b')(a^{-1}, b^{-1}) = (1, b b' b^{-1})$$

ist N_2 Normalteiler von A und weiter von H_2 . Entsprechend ist N_1 Normalteiler von A und H_1 . Man sieht sofort, dass auch $N_1 \times N_2 \subseteq A$ ist und gleichfalls Normalteiler von A sein muss.

Sei H_1 einfach, dann ist entweder $N_1 = H_1$ oder $N_1 = 1$.

Der letztere Fall kann nur dann eintreten, wenn

$$\mathcal{Q}_m(f_2)/\mathcal{Q}_m(f_1) \cap \mathcal{Q}_m(f_2) \cong 1,$$

also $\mathcal{Q}_m(f_2) \subseteq \mathcal{Q}_m(f_1)$ ist. $N_1 = H_1$ heisst aber, dass sämtliche Elemente von H_1 mit dem Einselement von H_2 zusammenstehen können. A ist in diesem Falle das direkte Produkt von H_1 und H_2 . $\mathcal{Q}_m(f_2) \subseteq \mathcal{Q}_m(f_1)$ bedeutet, dass es einen Homomorphismus θ von H_2 auf H_1 gibt, so dass $\theta f_2 = f_1$ ist. Die Matrix α erzeugt also immer dann das direkte Produkt $H_1 \times H_2$, wenn eine Spalte, die kein homomorphes Bild der anderen Spalte ist, eine einfache Gruppe erzeugt.

Die Voraussetzungen, unter denen $A \cong H_1 \times H_2$ ist, können noch allgemeiner gefasst werden. Der Vorbereitung hierzu dienen die folgenden Überlegungen. Da $\mathcal{Q}_m(f_1) \cap \mathcal{Q}_m(f_2)$ Normalteiler von f_m und daher auch von $\mathcal{Q}_m(f_1)$ und $\mathcal{Q}_m(f_2)$ ist, ergibt sich unmittelbar aus (3) und (4)

$$(5) \quad \begin{aligned} H_1 &\cong f_m/\mathcal{Q}_m(f_1) \cong f_m/\mathcal{Q}_m(f_1) \cap \mathcal{Q}_m(f_2)/\mathcal{Q}_m(f_1)/\mathcal{Q}_m(f_1) \cap \mathcal{Q}_m(f_2) \cong A/N_2 \\ H_2 &\cong f_m/\mathcal{Q}_m(f_2) \cong f_m/\mathcal{Q}_m(f_1) \cap \mathcal{Q}_m(f_2)/\mathcal{Q}_m(f_2)/\mathcal{Q}_m(f_1) \cap \mathcal{Q}_m(f_2) \cong A/N_1 \end{aligned}$$

und als

Satz 2: Es gilt

$$\begin{aligned} H_1 &\cong A/N_2 \\ H_2 &\cong A/N_1 \end{aligned}$$

Die Beziehungen (5) stellen bereits eine allgemeine Aussage über die Struktur der Gruppe A und über die Zusammenhänge zwischen A und den Spaltengruppen dar. Offensichtlich spielt die spezielle

Erzeugung von H_1 und H_2 durch f_1 und f_2 eine entscheidende Rolle, denn der Durchschnitt $\mathcal{R}_m(f_1) \cap \mathcal{R}_m(f_2)$ wird sich im allgemeinen schon bei einer Permutation der Komponenten einer der Spalten der Matrix ändern. So erzeugt beispielsweise die Matrix α_1 in § 1 die Gruppe $\mathcal{T}_3 \times \mathcal{T}_4$,

α_2 aber nur die Gruppe $\mathcal{T}_4$, während sich beide Matrizen nur dadurch unterscheiden, dass die Komponenten der zweiten Spalte vertauscht sind. Es wurde bereits gesagt, dass H_1 und H_2 Faktorgruppen von A isomorph sind. Satz 2 zeigt, dass N_2 und H_1 die zugehörigen Normalteiler sind.

§ 3. Es soll nun allgemein gezeigt werden, wann die Matrix α das direkte Produkt der beiden Spaltengruppen H_1 und H_2 liefert:

Satz 3: Es sei $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_m & b_m \end{pmatrix}$ und $\{\alpha\} = 1$. Die Gruppe A ist genau dann das direkte Produkt der Gruppen $H_1 = \{f_1\} = \{(a_1, a_2, \dots, a_m)\}$ und $H_2 = \{f_2\} = \{(b_1, b_2, \dots, b_m)\}$, wenn $\mathcal{R}_m(f_1)$ und $\mathcal{R}_m(f_2)$ zusammen die freie Gruppe f_m erzeugen.

Beweis: Es sei $f_m = \{\mathcal{R}_m(f_1), \mathcal{R}_m(f_2)\}$, dann ist $f_m = \mathcal{R}_m(f_1) \cdot \mathcal{R}_m(f_2)$, weil $\mathcal{R}_m(f_1)$ und $\mathcal{R}_m(f_2)$ Normalteiler sind.

Es ist

$$\begin{aligned} H_1 &\cong f_m / \mathcal{R}_m(f_1) \cong \mathcal{R}_m(f_1) \cdot \mathcal{R}_m(f_2) / \mathcal{R}_m(f_1) \\ &\cong \mathcal{R}_m(f_2) / \mathcal{R}_m(f_1) \cap \mathcal{R}_m(f_2) \cong N_1 \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} H_2 &\cong f_n / \mathcal{Q}_n(f_2) \cong \mathcal{Q}_n(f_1) \cdot \mathcal{Q}_n(f_2) / \mathcal{Q}_n(f_2) \\ &\cong \mathcal{Q}_n(f_1) / \mathcal{Q}_n(f_1) \cap \mathcal{Q}_n(f_2) \cong N_2 . \end{aligned}$$

$H_1 \cong N_1$ und $H_2 \cong N_2$ bedeutet aber, dass alle Vektoren $(h_1, 1)$ und $(1, h_2)$, $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ vorkommen, also dass $A = H_1 \times H_2$.

Ist umgekehrt $A = H_1 \times H_2$, also auch $H_1 \cong N_1$ und $H_2 \cong N_2$, dann folgt aus

$$H_1 / N_1 \cong f_n / \mathcal{Q}_n(f_1) / \mathcal{Q}_n(f_2) / \mathcal{Q}_n(f_1) \cap \mathcal{Q}_n(f_2) \cong 1$$

sofort, dass $f_n \cong \{ \mathcal{Q}_n(f_1), \mathcal{Q}_n(f_2) \}$.

Es ist bereits in § 2 eine spezielle Voraussetzung erwähnt worden, unter welcher eine Matrix α das direkte Produkt der beiden Spaltengruppen liefert. Diese Aussage lässt sich aus Satz 3 sofort herleiten. Sei nämlich H_1 einfach, dann muss, da H_1 keine Faktorgruppe ausser der Einheitsgruppe (oder sich selbst) besitzt, notwendig durch Hinzunahme jeder beliebigen Relation $r(x_1, x_2, \dots, x_n)$ die nicht bereits in $\mathcal{Q}_n(f_1)$ enthalten ist, aus $\mathcal{Q}_n(f_1)$ und $r(x_1, x_2, \dots, x_n)$ die freie Gruppe f_n erzeugt werden können. Daher gilt in diesem Falle immer, wenn H_1 keine Faktorgruppe von H_2 ist, auch $\{ \mathcal{Q}_n(f_1), \mathcal{Q}_n(f_2) \} = f_n$.

§ 4. Ist $\{ \mathcal{Q}_n(f_1), \mathcal{Q}_n(f_2) \}$ eine echte Untergruppe von f_n , was nach Satz 3 bedeutet, dass A echte Untergruppe von $H_1 \times H_2$ ist, so gilt

Satz 4: Sei $\alpha = (f_1, f_2)$ und $\{\alpha\} = A$. Genau dann ist A eine echte Untergruppe des direkten Produkts von $H_1 = \{f_1\}$ und $H_2 = \{f_2\}$, wenn es Homomorphismen θ_1 von H_1 und θ_2 von H_2 gibt, sodass für die erzeugenden Vektoren f_1 und f_2 gilt

$$(6) \quad \theta_1 f_1 = \theta_2 f_2 = f^*,$$

mit $\{f^*\} \subset A$ (bzw. $f^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Beweis: Ist $A \subset H_1 \times H_2$, so ist nach Satz 3 stets $\{\mathfrak{R}_m(f_1), \mathfrak{R}_m(f_2)\}$. Ist andererseits $\theta_1 f_1 = \theta_2 f_2 = f^*$, so bedeutet dies für die entsprechenden Relationengruppen

$$\{\mathfrak{R}_m(f_1), \bar{\mathfrak{E}}_1\} = \{\mathfrak{R}_m(f_2), \bar{\mathfrak{E}}_2\} = \mathfrak{R}_m(f^*),$$

wobei $\bar{\mathfrak{E}}_1$ und $\bar{\mathfrak{E}}_2$ geeignete Komplexe aus f_m sind. Weil beide Klammern gleich sind, ist dann auch

$$\{\mathfrak{R}_m(f_1), \bar{\mathfrak{E}}_1, \mathfrak{R}_m(f_2), \bar{\mathfrak{E}}_2\} = \mathfrak{R}_m(f^*)$$

und somit

$$(7) \quad \{\mathfrak{R}_m(f_1), \mathfrak{R}_m(f_2)\} \subseteq \mathfrak{R}_m(f^*) \subset f_m.$$

Da $\{\mathfrak{R}_m(f_1), \mathfrak{R}_m(f_2)\} = \mathfrak{R}_m(\bar{f})$ ist, folgt aus (7) sofort $\mathfrak{R}_m(\bar{f}) \subseteq \mathfrak{R}_m(f^*)$. Die Gruppe $\bar{H} = \{\bar{f}\}$ ist also die grösste Faktorgruppe von H_1 und H_2 , für welche bei der Erzeugung von A durch die Matrix $\alpha = (f_1, f_2)$ die Beziehung (6) gilt.

§ 5. Die von einer zwispaltigen Matrix $\alpha = (f_1, f_2)$ erzeugte Gruppe $\{\alpha\} = A$ soll jetzt noch näher untersucht werden. Es sei $\{\mathfrak{R}_m(f_1), \mathfrak{R}_m(f_2)\} \neq f_m$, also $\{\mathfrak{R}_m(f_1), \mathfrak{R}_m(f_2)\} = \mathfrak{R}_m(\bar{f})$ eine Relationengruppe der Gruppe $\bar{H} \supset A$. Folglich gilt, da $\mathfrak{R}_m(f_1)$ und $\mathfrak{R}_m(f_2)$ Normalteiler von $\mathfrak{R}_m(\bar{f})$ sind, $\mathfrak{R}_m(\bar{f}) = \mathfrak{R}_m(f_1) \cdot \mathfrak{R}_m(f_2)$ und daher für $\mu = 1, 2$

$$\begin{aligned} f_m / \mathfrak{R}_m(\bar{f}) &\cong f_m / \mathfrak{R}_m(f_\mu) / \mathfrak{R}_m(\bar{f}) / \mathfrak{R}_m(f_\mu) \\ (8) \quad &\cong f_m / \mathfrak{R}_m(f_\mu) / \mathfrak{R}_m(f_1) \cdot \mathfrak{R}_m(f_2) / \mathfrak{R}_m(f_\mu) \\ &\cong H_\mu / N_\mu \cong \bar{H}. \end{aligned}$$

Schreibt man also $\bar{H}_\mu = H_\mu / N_\mu$, $\mu = 1, 2$, dann gilt $\bar{H}_1 \cong \bar{H}_2 \cong \bar{H}$. Bei der Abbildung $H_\mu \rightarrow \bar{H}_\mu$ gehen die Vektoren f_μ in $\bar{f}_\mu$ über, und es ist schliesslich

$$\mathfrak{R}_m(\bar{f}_1) \cong \mathfrak{R}_m(\bar{f}_2) \cong \mathfrak{R}_m(\bar{f}).$$

Der Normalteiler N_μ von H_μ wurde definiert als die Untergruppe aller der Elemente von H_μ , die in den Vektoren $\alpha_i \in \{\alpha\}$ mit einer 1 als zweiter Komponente zusammenstehen. Das direkte Produkt $N_1 \times N_2$ ist infolgedessen eine Untergruppe von $\{\alpha\}$, deren Elemente vektoriell geschrieben die Form (a_h, b_h) , $a_h \in N_1, b_h \in N_2$ haben. Da $N_1 \times N_2$ Normalteiler von A ist, kann man

$$\{\alpha\} / N_1 \times N_2 \cong \{\bar{\alpha}\}$$

bilden, und die Matrix $\bar{\alpha}$ erhält die Form $\bar{\alpha} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2)$. Wegen $\mathfrak{R}_m(\bar{f}_1) \cong \mathfrak{R}_m(\bar{f}_2) \cong \mathfrak{R}_m(\bar{f})$ ist $\mathfrak{R}_m(\bar{\alpha}) = \mathfrak{R}_m(\bar{f})$, also

$$(9) \quad A / N_1 \times N_2 \cong \bar{H}.$$

Sind die Spaltengruppen von endlicher Ordnung, so liest man unmittelbar aus (8) und (9) ab:

Satz 5 : Sei h_μ die Ordnung von H_μ , m_μ die Ordnung von N_μ , $\bar{h}$ die Ordnung von $\bar{H}$ und a die Ordnung von A , dann ist

$$a = m_1 \cdot m_2 \cdot \bar{h} = \frac{h_1 \cdot h_2}{\bar{h}}$$

Es sei H_1 eine Gruppe $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\ell$ ein System definierender Relationen von H_1 und $\mathcal{Q}_m(H_1)$ der Relationennormalteiler, der durch diese Relationen bestimmt wird. Die Bildung von $\mathcal{Q}_m(H_1)$ aus $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\ell$ soll durch $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\ell\} = \mathcal{Q}_m(H_1)$ bezeichnet werden. Die Hinzunahme von neuen definierenden Relationen $\tau_{\ell+1}, \dots, \tau_{\ell+m}$ bedeutet für die Gruppe H_1 die Bildung einer Faktorgruppe nach einem Normalteiler N . Also ist

$$\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\ell, \tau_{\ell+1}, \dots, \tau_{\ell+m}\} = \mathcal{Q}_m(H_1/N)$$

eine Relationengruppe von H_1/N . Man kann andererseits $\mathcal{Q}_m(H_1/N)$ aber auch erhalten, indem man zunächst $\tau_{\ell+1}, \dots, \tau_{\ell+m}$ als definierende Relationen einer gewissen Gruppe H_2 auffasst, also $\{\tau_{\ell+1}, \dots, \tau_{\ell+m}\} = \mathcal{Q}_m(H_2)$ bildet, dann mit dessen Hilfe $\mathcal{Q}_m(H_1/N) = \{\mathcal{Q}_m(H_1), \mathcal{Q}_m(H_2)\}$ erhält. H_1/N ist einer bestimmten Faktorgruppe von H_1 und H_2 isomorph und wegen (3), (4) und (5) wird

$$N \cong \mathcal{Q}_m(H_2) / \mathcal{Q}_m(H_1) \cap \mathcal{Q}_m(H_2).$$

Es folgt

Satz 6 : Sei $\mathcal{R}_m(H_1)$ Relationennormalteiler einer Gruppe H_1 , die durch die definierenden Relationen $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L$ bestimmt ist. Seien $\tau_{L+1}, \dots, \tau_{L+m}$ weitere Relationen. Sie bilden mit $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L$ zusammen ein System definierender Relationen einer Faktorgruppe $\bar{H}_1$ von H_1 . Für sich allein erzeugen $\tau_{L+1}, \dots, \tau_{L+m}$ eine Relationengruppe $\mathcal{R}_m(H_2)$ einer Gruppe H_2 . Dann gilt $\bar{H}_1 \cong H_1/N$ wobei

$$N \cong \mathcal{R}_m(H_2) / \mathcal{R}_m(H_1) \cap \mathcal{R}_m(H_2)$$

ist.

§ 6. Nun sollen Matrizen mit mehr als zwei Spalten betrachtet werden. Sei α eine Matrix mit den Spalten $f_K, K=1, 2, \dots, k$ und m Zeilen,

$$\alpha = (f_1, f_2, \dots, f_k)$$

die Elemente von $\{\alpha\} = A$ infolgedessen k -dimensionale Vektoren. Es wird eine Folge von Teilmatrizen

$$\alpha_1 = f_1, \alpha_2 = (f_1, f_2), \dots, \alpha_k = (f_1, f_2, \dots, f_k) = \alpha$$

gebildet, die die Gruppen $\{\alpha_1\} = H_1 = A_1, \{\alpha_2\} = A_2, \dots, \{\alpha_k\} = A_k = A$ erzeugen. Dann lässt sich jede Matrix α_K im Hinblick auf die Gruppenerzeugung als eine Matrix mit den zwei Spalten α_{K-1} und f_K auffassen, die erzeugende Vektoren der Spaltengruppen A_{K-1} und H_K sind, mit den zugehörigen Relationengruppen $\mathcal{R}_m(\alpha_{K-1})$ und $\mathcal{R}_m(f_K)$. Durch aufeinanderfolgende Bildung von $A_1, A_2, \dots$ erhält man schliesslich $A_k = A$, die von α erzeugte Gruppe.

Aus dieser schrittweisen Bildung von A sieht man sofort, dass sich Satz 1 auch auf den Fall von k statt zwei Spalten verallgemeinern lässt, wobei mit jeder neuen Spalte der Durchschnitt mit einem weiteren Relationennormalteiler gebildet werden muss, also

$$\mathcal{R}_m(\alpha) = \bigcap_k \mathcal{R}_m(f_k), \quad k = 1, 2, \dots, k.$$

Satz 2, 3, 4 und 5 müssten für den allgemeinen Fall von k Spalten anders formuliert werden. Darauf wird jedoch hier verzichtet, weil sie nur für die einzelnen Schritte der Bildung von A von Interesse sind.

Es ist offensichtlich, dass man sich nicht auf die oben gezeigte Art der Bildung von $\{\alpha\} = A$ zu beschränken braucht, sondern nach Belieben von der Vertauschbarkeit der Spalten Gebrauch machen, zuerst mehrere Teilmatrizen bilden und diese später nach Bedarf zusammenfassen kann. Beispielsweise in der Art, dass man zunächst alle Teilmatrizen bildet, die direkte Produkte ihrer Spaltengruppen erzeugen und diese dann zu einer Matrix vereinigt.

II. Die T_m , U_m und V_m -Gruppen.

§ 7. B. H. Neumann und Hanna Neumann [2] haben zu einer gegebenen Gruppe G Gruppen definiert, die G invariant zugeordnet sind und Aussagen über die Struktur von G ermöglichen

sollen. Die Erzeugung dieser Gruppen ist durch die Bildung geeigneter Matrizen möglich.

Es sei y ein Vektor, der die gegebene Gruppe G erzeugt, also ist $\{y\} = G$ und für jeden Homomorphismus θ von G gilt $\{\theta y\} = \theta G$. G sei durch n Elemente zu erzeugen, η sei ein Endomorphismus von f_m , $\mathcal{U} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ein erzeugender Vektor von f_m . Dann kann

$$\eta \mathcal{U} = M(\mathcal{U}) = (\omega_1(\mathcal{U}), \omega_2(\mathcal{U}), \dots, \omega_m(\mathcal{U}))$$

gesetzt werden, worin die $\omega_i(\mathcal{U})$ Worte in den x_i sind.

Die Wirkung von η auf y werde dann durch

$$\eta y = M(y) = (\omega_1(y), \omega_2(y), \dots, \omega_m(y))$$

erklärt. $M(y)$ ist also ein Vektor über G , dessen Komponenten Produkte der Komponenten g_i von y sind. Ist speziell φ ein Automorphismus von f_m , so ist auch φy ein erzeugender Vektor von G , wenn y dies ist. φ braucht jedoch im allgemeinen keinen Automorphismus von G zu induzieren.

Die Wirkung eines Endomorphismus η von f_m auf eine Matrix $\alpha = (f_1, f_2, \dots, f_h)$ wird erklärt durch

$$\eta \alpha = \eta \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \\ \omega_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \\ \vdots \\ \omega_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \end{pmatrix}$$

Da aber wegen (1)

$$\omega_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = (\omega_i(f_1), \omega_i(f_2), \dots, \omega_i(f_h))$$

ist, wird

$$(10) \quad \eta \alpha = (\eta f_1, \eta f_2, \dots, \eta f_h) .$$

Ist y ein erzeugender Vektor von G , so kann man also entweder durch Anwendung von Automorphismen von f_n als auch durch Anwendung von Automorphismen von G auf y andere Vektoren erhalten, die ebenfalls G erzeugen. Dies gilt auch für Matrizen, da sie ebenfalls als erzeugende Vektoren betrachtet werden können.

Es sei nun G eine Gruppe, die von n^* Elementen erzeugt wird, aber von keinem Vektor kleinerer Dimension. $n \geq n^*$ sei eine feste natürliche Zahl. T_n bedeute die Gesamtheit aller Systeme aus n Elementen, die G erzeugen. In der hier eingeführten Bezeichnungsweise stellt T_n also die Menge aller n -dimensionalen Vektoren y_v über G dar, für welche die Beziehung $\{y_v\} = G$ gilt. Die Automorphismengruppe von f_n soll mit ϕ_n , diejenigen von G mit β bezeichnet werden. Eine β -Klasse, die auch durch βy gekennzeichnet wird, ist die Menge der Vektoren, in welche die Automorphismen $\beta \in \beta$ einen festen Vektor $y \in T_n$ überführen. Die Elemente jeder β -Klasse werden von β transitiv permutiert. Die Menge aller β -Klassen von T_n wird in sogenannte T -(Transitivitäts)-Systeme unterteilt. Sei P die von ϕ_n und β erzeugte Gruppe, dann besteht ein T -System aus allen Vektoren aus T_n , die mit Hilfe von P aus einem festen Vektor $y \in T_n$ gebildet werden können. Die Elemente $\psi \in \phi_n$ permutieren die β -Klassen eines T -Systems transitiv und führen stets β -Klassen in β -Klassen über.

Zu allen Vektoren y aus einer β -Klasse gehört dieselbe

Relationengruppe

$$\mathcal{R}_m(y) = \mathcal{R}_m(\beta y) \quad , \quad \beta \in B \quad ,$$

eine Beziehung, die man auch zur Definition der B -Klassen benutzen könnte. Mit Hilfe dieser Eigenschaft der erzeugenden Vektoren einer Gruppe kann man in vielen Fällen die Matrix α , die eine bestimmte Gruppe A erzeugt, vereinfachen. Seien f_μ und f_ν Spaltenvektoren von α , sei $f_\nu = \beta_\mu f_\mu$ und β_μ ein Automorphismus von $\{f_\mu\} = H_\mu$, dann kann man die Spalte f_ν aus α streichen. Die so entstandene Matrix α' erzeugt dieselbe Gruppe wie α , denn aus Satz 1 folgt $\mathcal{R}_m(\alpha') = \mathcal{R}_m(\alpha)$, da $\mathcal{R}_m(f_\mu) = \mathcal{R}_m(f_\nu)$. Ist eine Spalte f_ν das homomorphe Bild einer anderen, $f_\nu = \theta_\mu f_\mu$ und θ_μ ein Homomorphismus von $\{f_\mu\} = H_\mu$, so kann man f_ν ebenfalls weglassen, da $\mathcal{R}_m(f_\nu) \supseteq \mathcal{R}_m(f_\mu)$ und infolgedessen $\mathcal{R}_m(\alpha)$ unverändert bleibt.

Mit $\mathcal{T}_m(y) = \bigcap_s \mathcal{R}_m(sy)$, $s \in P$ werde der Durchschnitt aller Relationennormalteiler bezeichnet, die durch m -dimensionale erzeugende Vektoren von G bestimmt sind, die im gleichen T -System P_y wie y liegen. Dann ist die T_m -Gruppe von G definiert durch

$$T_m(y) \cong f_m / \mathcal{T}_m(y) \quad .$$

Die T_m -Gruppe ist von der Wahl des T -Systems abhängig, ähnlich wie $\mathcal{R}_m(y)$ von der Wahl der B -Klasse. Um dies anzudeuten, schreibt man $T_m(y)$, wobei y das T -System repräsentiert, dem y angehört.

Ist $\mathcal{U}_n(G) = \bigcap \mathcal{R}_n(y_v)$, $y_v \in T_n$ der Durchschnitt aller Relationengruppen, die zu erzeugenden Vektoren y_v aus T_n gehören, dann wird die $\mathcal{U}_n$ -Gruppe von G durch

$$\mathcal{U}_n(G) \cong \mathfrak{g}_n / \mathcal{U}_n(G)$$

definiert. $\mathcal{U}_n$ ist im Gegensatz zu $T_n(y)$ von der speziellen Erzeugung von G unabhängig.

Sei $\mathcal{W}_n(G) = \bigcap \mathcal{R}_n(b_r)$ der Durchschnitt der Relationengruppen für alle n -dimensionalen Vektoren b_r über G , also auch solcher, die Untergruppen von G erzeugen, so wird die $\mathcal{W}_n$ -Gruppe von G definiert durch

$$\mathcal{W}_n(G) \cong \mathfrak{g}_n / \mathcal{W}_n(G).$$

$\mathcal{W}_n(G)$ ist ebenfalls von einer bestimmten Erzeugung von G unabhängig.

Sei T_n die Gesamtheit aller n -dimensionalen erzeugenden Vektoren einer Gruppe G und T_{n+1} die Gesamtheit aller $n+1$ -dimensionalen erzeugenden Vektoren dieser Gruppe, dann ist allgemein $T_{n+1} \supseteq T_n$, denn jeder n -dimensionale Vektor, der G erzeugt, kann durch Hinzufügen eines beliebigen Elements zu einem $n+1$ -dimensionalen gemacht werden, der ebenfalls G erzeugt. Infolgedessen wird stets $T_{n+1} \subseteq T_n$, $\mathcal{U}_{n+1} \subseteq \mathcal{U}_n$ und $\mathcal{W}_{n+1} \subseteq \mathcal{W}_n$ sein. Die T_n , $\mathcal{U}_n$ und $\mathcal{W}_n$ -Gruppen von G sind also Faktorgruppen von T_{n+1} , $\mathcal{U}_{n+1}$ und $\mathcal{W}_{n+1}$, das heisst, sie sind abhängig von der Dimension der benutzten erzeugenden Vektoren y_v von G .

§ 8. Mit Hilfe der Gruppenerzeugung durch eine Matrix lässt sich sofort für jede Gruppe G angeben, wie die erzeugenden Vektoren (Matrizen) der T_n , U_n und V_n -Gruppe von G beschaffen sein müssen. Sei y_0 ein erzeugender Vektor von G und y_v , $v=0,1,2,\dots$ alle erzeugenden Vektoren, die in demselben T -System wie y_0 liegen, dann ist nach Satz 1 die Relationengruppe der von der Matrix $\alpha = (y_0, y_1, \dots)$, die alle y_v als Spaltenvektoren enthält, erzeugten Gruppe

$$\mathcal{R}_n(\alpha) = \bigwedge_v \mathcal{R}_n(y_v) = T_n(y_0).$$

α erzeugt somit die Gruppe $T_n(y_0)$.

Sind die Spaltenvektoren einer Matrix $\mathcal{Z}$ sämtliche erzeugenden Vektoren y_v von G , so ist

$$\mathcal{R}_n(\mathcal{Z}) = \bigwedge_v \mathcal{R}_n(y_v) = \mathcal{R}_n(G).$$

$\mathcal{Z}$ erzeugt also $U_n(G)$. Durch einen Automorphismus φ von f_n werden die Spalten von $\mathcal{Z}$ nur permutiert, folglich ist $\mathcal{R}_n(\mathcal{Z}) = \mathcal{R}_n(\varphi \mathcal{Z})$. Es gibt demnach nur eine $\mathcal{B}$ -Klasse von erzeugenden Vektoren für U_n .

Bestehen die Spalten einer Matrix $\mathcal{L}$ aus sämtlichen geordneten n -Tupeln h_r , die sich aus den Elementen von G bilden lassen, so ist

$$\mathcal{R}_n(\mathcal{L}) = \bigwedge_r \mathcal{R}_n(h_r) = \mathcal{R}_n(G),$$

und damit erzeugt $\mathcal{L}$ die Gruppe $V_n(G)$. Auch V_n besitzt nur eine $\mathcal{B}$ -Klasse von erzeugenden n -dimensionalen Vektoren.

Man erhält auf diese Weise die erzeugenden Matrizen von $U_m(G)$ und $V_m(G)$, wie sie F. Wever [3] eingeführt hat.

Ganz besonders übersichtlich sind in dieser Schreibweise die

T_m und U_m -Gruppen einer einfachen Gruppe G . Bildet man diese mit Hilfe von $\alpha = (y, y_1, \dots)$ nach dem Verfahren des aufeinanderfolgenden Überganges von α_{k-1} zu α_k aus § 6, so ist, da die $\{y_n\} = G$ einfach sind, entweder $\{\alpha_n\} = \{\alpha_{n-1}\} \times \{y_n\}$ oder $\{\alpha_n\} = \{\alpha_{n-1}\}$, je nachdem $\{Q_m(\alpha_{n-1}), Q_m(y_n)\}$ gleich f_n oder $Q_m(y_n)$ ist. Das heisst also, dass beim Übergang von α_{k-1} zu α_k entweder $\{\alpha_n\} = A_k = A_{k-1} \times G$ oder $\{\alpha_n\} = A_k = A_{k-1}$ wird. Daraus folgt, dass die T_m und U_m -Gruppen einer einfachen Gruppe G immer direkten Potenzen von G isomorph sind.

§ 9. Sei $\alpha = (f_1, f_2)$ eine Matrix mit zwei Spalten und n Zeilen, die eine Gruppe A erzeugt und φ_v ein Automorphismus von f_n . Dann bilden sämtliche $\varphi_v \alpha$ mit $\varphi_v \in \phi_n$ ein T -System von erzeugenden Matrizen von A , da man α als erzeugenden Vektor von A mit den Komponenten α_i auffassen kann. Wegen (10) kommen in den Matrizen $\phi_n \alpha$ sämtliche B -Klassen, die zum selben T -System wie f_n , $n=1,2$ gehören, mit wenigstens einem erzeugenden Vektor von H_k vor.

Es werden nun alle Matrizen der Menge $\phi_n \alpha$ zu einer Matrix $\mathcal{L}$ vereinigt. Dann ist die Relationengruppe

$$Q_m(\mathcal{L}) = \bigcap_v Q_m(\varphi_v \alpha) = T_m(\alpha)$$

denn $\phi_m \alpha$ enthält ja Vertreter von allen $\mathcal{B}$ -Klassen, die mit Hilfe der Automorphismen aus $\mathcal{P}$ aus der erzeugenden Matrix α von A gewonnen werden können, und damit kommen alle zugehörigen verschiedenen Relationennormalteiler auch tatsächlich im Durchschnitt $\bigcap \mathcal{R}_m(\psi \alpha)$ vor. Die Matrix $\mathcal{L}$ erzeugt also die zu α gehörige T_m -Gruppe von A .

Wegen der Vertauschbarkeit der Spalten lassen sich die einzelnen Vektoren in $\mathcal{L}$ so umordnen, dass zuerst alle $f_1^{(i)} = \psi_i f_1$ und dann alle $f_2^{(i)} = \psi_i f_2$ stehen. Man kann aus diesem Grunde $\mathcal{L}$ in zwei Teilmatrizen $\mathcal{L}'$ und $\mathcal{L}''$ zerlegen:

$$\mathcal{L}' = (f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \dots) \quad , \quad \mathcal{L}'' = (f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, \dots) \quad .$$

Dann erzeugt die Matrix $\mathcal{L}'$ allein die T_m -Gruppe von $\mathcal{H}_1$, die zu dem durch $f_1^{(i)} = f_1$ bestimmten T -System gehört, $\{\mathcal{L}'\} = T_m(f_1)$, und entsprechend $\{\mathcal{L}''\} = T_m(f_2)$. $\mathcal{L}$ kann infolgedessen als eine Matrix mit den beiden Spalten $\mathcal{L}'$ und $\mathcal{L}''$ mit den zugehörigen Relationengruppen $\mathcal{R}_m(\mathcal{L}')$ und $\mathcal{R}_m(\mathcal{L}'')$ aufgefasst werden, welche die Spaltengruppen $T_m(f_1)$ und $T_m(f_2)$ erzeugen. Dann ist die zu $\{\mathcal{L}\} = T_m(\alpha)$ gehörende Relationengruppe gleich dem Durchschnitt von $\mathcal{R}_m(f_1)$ und $\mathcal{R}_m(f_2)$.

Es gilt also

Satz 7 : Sei $\alpha = (f_1, f_2)$ und $\{\alpha\} = A$. Dann wird die zur Erzeugung durch α gehörende T_m -Gruppe von A durch eine Matrix $\mathcal{L}$ erzeugt, die alle Vektoren aus $\phi_m f_1$ und $\phi_m f_2$ als Spaltenvektoren besitzt, wenn ϕ_m die Automorphismengruppe von f_m ist. Für die zugehörige Relationengruppe $\mathcal{R}_m(\alpha)$ ergibt sich die Beziehung

$$(11) \quad \mathcal{R}_m(\alpha) = \mathcal{R}_m(f_1) \cap \mathcal{R}_m(f_2) \quad .$$

Es lässt sich natürlich eine Matrix $\overline{\mathcal{L}}$, die $T_n(\alpha)$ erzeugt, auch aus allen P_{f_1} und P_{f_2} bilden, doch sind die dabei gegenüber $\mathcal{L}$ zusätzlich auftretenden Spaltenvektoren auf die Erzeugung von $T_n(\alpha)$ ohne Einfluss, da es sich nur um Vektoren handelt, deren $\mathcal{B}$ -Klasse bereits durch einen anderen Vektor in $\mathcal{L}$ vertreten war.

Ist speziell $f_2 = \theta f_1$ und θ ein Homomorphismus von H_1 , so ist wegen $\{\alpha\} = \{(f_1, f_2)\} = H_1$ auch $T_n(\alpha) = T_n(f_1)$ und daher $T_n(\alpha) = T_n(f_1) \cap T_n(f_2) = T_n(f_1)$ das heisst $T_n(f_1) \subseteq T_n(f_2)$.

Sei $\alpha = (f_1, f_2, \dots, f_k)$, dann ergibt mehrfache Anwendung von (11) hintereinander $T_n(\alpha) = \bigcap_k T_n(f_k)$, und man erhält die Matrix $\overline{\mathcal{L}}$, die $T_n(\alpha)$ erzeugt, indem man die Matrizen $\mathcal{L}_k$, die die Gruppen $T_n(f_k)$ erzeugen, zusammenfasst.

§ 10. B.H. Neumann und Hanna Neumann [2] haben auf das folgende Problem hingewiesen, das für viele Fragen, die mit den $\mathcal{U}_n$ -Gruppen zusammenhängen, von Bedeutung ist: Seien G und H Gruppen, die sich durch n Elemente erzeugen lassen, und sei H homomorphes Bild von G . Gibt es dann zu jedem H erzeugenden Vektor f (stets mit n Komponenten) eine homomorphe Abbildung θ von G auf H und einen G erzeugenden Vektor y , der dabei auf f abgebildet wird, sodass also

$$(12) \quad \theta y = f$$

gilt?

Bei der Frage nach einem Satz 7 analogen Satz für die $\mathcal{U}_n$ -Gruppen zeigt es sich, dass Aussagen, die dem für die T_n -Gruppen gältigen

Satz 7 entsprechen, nur für solche Gruppen gemacht werden können, bei denen (12) für alle in Frage kommenden erzeugenden Vektoren von Faktorgruppen erfüllt ist. Wenn dies für $\alpha = (f_1, f_2)$ mit $\{\alpha\} = A$, $\{f_1\} = H_1$, $\{f_2\} = H_2$ nämlich nicht der Fall ist, dann kommen in den Matrizen $\alpha_v \in \phi_m \alpha$, die A erzeugen, gar nicht alle $f_1^{(v)}$ bzw. $f_2^{(v)}$ vor.

Satz 8: Sei $\alpha = (f_1, f_2)$, $\{\alpha\} = A$ und (12) erfüllt für alle erzeugenden Vektoren α_v von A und alle $f_k^{(v)}$, welche die Spaltengruppen H_k erzeugen, und sei $\mathcal{L}$ eine Matrix, die sämtliche $f_k^{(v)}$ enthält. Dann ist $\mathcal{U}_m(A) = \{\mathcal{L}\}$, man kann $\mathcal{L}$ umordnen in zwei Teilmatrizen $\mathcal{L}'$ und $\mathcal{L}''$, sodass $\{\mathcal{L}'\} = \mathcal{U}_m(H_1)$ und $\{\mathcal{L}''\} = \mathcal{U}_m(H_2)$ ist, und es gilt

$$\mathcal{U}_m(A) = \mathcal{U}_m(H_1) \cap \mathcal{U}_m(H_2).$$

Beweis: Man kann $\alpha = (f_1, f_2) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ als einen erzeugenden Vektor von A mit den Komponenten μ_i auffassen. Aus diesem erzeugenden Vektor lassen sich alle übrigen erzeugenden Vektoren bilden. Ihre Komponenten sind dann bestimmte Potenzprodukte der μ_i . Man erhält so alle erzeugenden Vektoren (Matrizen) α_v' von A in der Form $\alpha_v' = (f_1^{(v)}, f_2^{(v)})$, wobei $\{f_k^{(v)}\} = H_k' \subseteq H_k$ ist. Seien θ_1 und θ_2 geeignete Homomorphismen von A , dann ist nach Voraussetzung

$$(13) \quad \theta_k \alpha_v' = f_k^{(v)}, \quad \{f_k^{(v)}\} = H_k, \quad k=1,2.$$

Da H_k und H_k' Faktorgruppen von A sind und H_k' Untergruppe von H_k , ist H_k' nach dem Isomorphiesatz einer Faktorgruppe von H_k isomorph und es gilt

$$(14) \quad \theta_k' f_k^{(v)} = f_k^{(v)}, \quad k=1,2,$$

wenn $\mathcal{O}'_\kappa$ ein Homomorphismus von H_κ ist. Nun wird die Matrix

$$\alpha'' = (f_1^{(v)}, f_2^{(v)}, f_1^{(v)}, f_2^{(v)})$$

gebildet. Es ist $\{\alpha_v''\} = \{\alpha_v'\} = A$, da die zu α_v' neu hinzugekommenen Spalten wegen (13) homomorphe Bilder von α_v' sind. Da andererseits die Beziehungen (14) bestehen, kann man aus α_v'' die beiden Spalten $f_1^{(v)}$ und $f_2^{(v)}$ weglassen, ohne dass sich die erzeugte Gruppe ändert. So erhält man

$$\alpha_v = (f_1^{(v)}, f_2^{(v)}), \quad \{\alpha_v\} = A.$$

Weil sich alle erzeugenden Matrizen α_v von A auf diese Weise konstruieren lassen, kommen alle erzeugenden Vektoren $f_\kappa^{(v)}$ der H_κ mindestens einmal in den α_v vor.

Fasst man alle α_v zu einer Matrix $\mathcal{Z}$ zusammen, so enthält diese also sämtliche erzeugenden Vektoren der H_κ . Man kann wieder so ordnen, dass $\mathcal{Z}$ in $\mathcal{Z}'$ und $\mathcal{Z}''$ zerfällt, sodass $\{\mathcal{Z}'\} = \mathcal{U}_m(H_1)$ und $\{\mathcal{Z}''\} = \mathcal{U}_m(H_2)$ ist. Dann folgt weiter für die Relationengruppe $\mathcal{R}_m(\mathcal{Z})$ wegen $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}', \mathcal{Z}'')$

$$\mathcal{R}_m(\mathcal{Z}) = \mathcal{R}_m(\mathcal{Z}') \cap \mathcal{R}_m(\mathcal{Z}'')$$

das heisst

$$\mathcal{R}_m(A) = \mathcal{R}_m(H_1) \cap \mathcal{R}_m(H_2).$$

Ist speziell $f_2 = \theta f_1$ und θ ein Homomorphismus von H_1 , so ist ähnlich wie bei den $\overline{T}_m$ -Gruppen $\mathcal{R}_m(H_1) \subseteq \mathcal{R}_m(\theta H_1)$.

§ 11. Die Matrix $\mathcal{L}$, welche die zu $\mathcal{A}$ gehörende $\mathcal{V}_m$ -Gruppe erzeugt, besitzt als Spalten sämtliche Matrizen, die $\{\mathcal{A}\} = A$ oder Untergruppen von A erzeugen. Diese Matrizen setzen sich aus allen möglichen Paaren $\mathcal{L}_1^{(1)}, \mathcal{L}_2^{(2)}$ von Vektoren $\mathcal{L}_k^{(2)}$ aus dem m -dimensionalen Vektorraum über H_k zusammen. Entsprechend dem früheren Vorgehen kann man $\mathcal{L}$ zerlegen in $\mathcal{L}'$ und $\mathcal{L}''$, wobei $\{\mathcal{L}'\} = \mathcal{V}_m(H_1)$ und $\{\mathcal{L}''\} = \mathcal{V}_m(H_2)$ ist, und damit

$$(15) \quad \mathcal{W}_m(A) = \mathcal{W}_m(H_1) \cap \mathcal{W}_m(H_2) .$$

Für $f_2 = \theta f_1$, wo θ ein Homomorphismus von H_1 ist, gilt ähnlich wie bei den $\mathcal{T}_m$ und $\mathcal{U}_m$ -Gruppen die Beziehung $\mathcal{W}_m(H_1) \subseteq \mathcal{W}_m(\theta H_1)$.

Man sieht sofort, dass für die $\mathcal{U}_m$ und $\mathcal{V}_m$ -Gruppen eine Verallgemeinerung auf k Spalten wie bei den $\mathcal{T}_m$ -Gruppen möglich ist.

Die Beziehung (15) wird von B. H. Neumann [1] bei der Behandlung der identischen Relationen erwähnt. Dort findet sich auch Satz 3 für den speziellen Fall ausgesprochen, dass beide Spaltengruppen $\mathcal{V}_m$ -Gruppen sind.

III. Die Erzeugung des direkten Produkts zweier Gruppen.

§ 12. Es sei G eine Gruppe, die von m Elementen erzeugt werden kann und einem direkten Produkt $G_1 \times G_2$ isomorph ist. Dann lässt sich G durch eine Matrix $\mathcal{A}$ mit m Zeilen und den Spalten $\mathcal{Y}_1$ und $\mathcal{Y}_2$, die geeignete erzeugende Vektoren von G_1 und G_2 sind, erzeugen. Man kann nämlich die Elemente von G

stets in der Form (g_{1i}, g_{2i}) schreiben, mit $g_{\kappa i} \in G_{\kappa}$.

Ein erzeugender Vektor von G hat dann die Gestalt

$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} \\ \vdots & \vdots \\ g_{1n} & g_{2n} \end{pmatrix}$, kann also als eine Matrix mit den Spalten-

gruppen G_1 und G_2 angesehen werden. Es gibt demnach für jede Gruppe mit n Erzeugenden, die einem direkten Produkt $G_1 \times G_2$ isomorph ist, eine Erzeugung nach Satz 3.

Sind jedoch G_3 und G_4 zwei Gruppen, die von je n Elementen erzeugt werden können, für die es zu keinem n -dimensionalen erzeugenden Vektor $y_3^{(s)}$ von G_3 einen passenden $y_4^{(r)}$ von G_4 gibt, sodass $\{\mathcal{B}_n(y_3^{(s)}), \mathcal{B}_n(y_4^{(r)})\} = \mathcal{B}_n$ ist, dann lässt sich das direkte Produkt $G_3 \times G_4$ nicht durch n Elemente erzeugen.

Diese Tatsache soll nun benutzt werden, um einige Aussagen über die Möglichkeit der Erzeugung direkter Produkte durch n Elemente zu machen. Besonders einfach liegen die Verhältnisse bei den direkten Potenzen einer Gruppe G . Hier genügt es, die $\mathcal{U}_n$ -Gruppe von G zu untersuchen, da an der Bildung der erzeugenden Matrix von $\mathcal{U}_n(G)$ sämtliche erzeugenden Vektoren von G beteiligt sind und nur diese für die Spalten einer Matrix, die eine direkte Potenz von G erzeugt, in Frage kommen.

Satz 9: Nur diejenigen direkten Potenzen einer Gruppe G können durch n Elemente erzeugt werden, die Faktorgruppen der $\mathcal{U}_n$ -Gruppe von G isomorph sind.

Beweis: Sei G^r die höchste direkte Potenz, die Faktorgruppe von U_n ist. Dann gibt es zu keinem n -dimensionalen erzeugenden Vektor y^* von G^r einen passenden y von G , sodass $\{B_n(y^*), B_n(y)\} = f_n$ ist, denn sonst wäre auch G^{r+1} noch Faktorgruppe von U_n . Das heisst, G^r ist die höchste direkte Potenz von G , welche noch von n Elementen erzeugt werden kann.

Die Anzahl der B -Klassen der n -dimensionalen erzeugenden Vektoren von G ist also die obere Grenze für r . Oder, wie sich leicht zeigen lässt, noch genauer: Die obere Grenze für r ist die kleinste Anzahl von B -Klassen, die G oder eine Faktorgruppe von G , die grösser als die Einheitsgruppe ist, für n Erzeugende besitzt.

Liegen alle n -dimensionalen erzeugenden Vektoren einer Faktorgruppe von G in einer B -Klasse, so gilt

Satz 10: Sei G eine Gruppe, die von n Elementen erzeugt werden kann, und sei G_1 eine Faktorgruppe von G , die nur eine B -Klasse von n -dimensionalen erzeugenden Vektoren besitzt (die also U_n -Gruppe einer Faktorgruppe G_2 von G ist: $G_1 \cong U_n(G_2)$), dann lässt sich das direkte Quadrat $G \times G$ nicht durch n Elemente erzeugen.

Beweis: Alle erzeugenden Vektoren von G kann man durch geeignete Homomorphismen von G auf einen solchen von G_1 abbilden. Sei y_1 ein fester erzeugender Vektor von G_1 , dann

ist stets $\theta_v y^{(v)} = y_v$, wobei die θ_v Homomorphismen von G und die $y^{(v)}$ erzeugende Vektoren von G sind. Nach Satz 4 gilt für alle Paare $(y^{(s)}, y^{(r)})$ die Beziehung

$$\{ \mathfrak{Q}_m(y^{(s)}), \mathfrak{Q}_m(y^{(r)}) \} \subseteq \mathfrak{Q}_m(G_n) \subset f_m.$$

Es kann also keine Matrix mit m Zeilen, deren Spaltengruppen G isomorph sind, die Gruppe $G \times G$ erzeugen.

§ 13. Satz 10 kann noch allgemeiner gefasst werden. Zunächst brauchen die beiden direkten Faktoren selbst nicht isomorph zu sein. Man sieht sofort, dass der Satz ebenso gültig bleibt, wenn man das direkte Produkt zweier Gruppen G_1 und G_2 bildet, die isomorphe $\mathfrak{U}_m$ -Gruppen als Faktorgruppen enthalten. Auch von dieser Voraussetzung kann man sich noch befreien. Es genügt bereits, wenn bei der Bildung des direkten Produkts eine Faktorgruppe von $G_1 \times G_2$, die einer $\mathfrak{U}_m$ -Gruppe isomorph ist, entsteht.

Satz 11: Seien G_1 und G_2 zwei Gruppen, die von je m Elementen erzeugt werden können. Seien $\overline{G}_\lambda \supset A$, $\lambda = 1, 2, \dots, l$ isomorphe Faktorgruppen von G_1 und G_2 . Sei weiter die τ_λ -te direkte Potenz von $\overline{G}_\lambda$ ebenfalls noch Faktorgruppe von G_1 , die s_λ -te direkte Potenz von $\overline{G}_\lambda$ Faktorgruppe von G_2 . Dann lässt sich $G_1 \times G_2$ nur dann durch m Elemente erzeugen, wenn für alle λ die Gruppe $\overline{G}_\lambda^{\tau_\lambda + s_\lambda}$ Faktorgruppe von $\mathfrak{U}_m(G_\lambda)$ ist.

Beweis: $G_1 \times G_2$ besitzt Faktorgruppen, die $\overline{G}_\lambda^{\tau_\lambda + s_\lambda}$ isomorph sind. Diese können nach Satz 9 nur dann durch m Elemente erzeugt werden, wenn $\overline{G}_\lambda^{\tau_\lambda + s_\lambda}$ Faktorgruppe von

$U_m(G_2)$ ist. Die Gruppe $G_1 \times G_2$ kann aber nur durch m Elemente erzeugt werden, wenn diese Möglichkeit für ihre Faktorgruppen besteht.

Wird $G_1 = G_2$ und $\tau_2 = \iota_2 = 1$ gesetzt, so erhält man durch k -fache Anwendung von Satz 11 die Aussage: Sei G eine Gruppe, die von m Elementen erzeugt werden kann, $\bar{G}_2$ Faktorgruppe von G . Dann lässt sich G^k nur dann durch m Elemente erzeugen, wenn jeweils $\bar{G}_2^k$ Faktorgruppe von $U_m(\bar{G}_2)$ ist. Als Beispiel hierzu die symmetrische Gruppe k -ten Grades $\mathcal{S}_k$. Sei $m=2$ und $\bar{G} = \mathcal{S}_2$. Da $U_2(\tau_2) = \tau_2 \times \tau_2$ ist, kann $\mathcal{S}_k^3$ nicht mehr durch zwei Elemente erzeugt werden. Auch der allgemeine Fall der Erzeugung von $\mathcal{S}_k^k, k \geq 2$ durch $m' \geq 2$ Elemente lässt sich leicht behandeln, weil die U_m -Gruppe von $\mathcal{S}_2$ für alle m gut zu übersehen ist, doch soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

Man sieht, dass die Möglichkeiten eines Systems von m Erzeugenden nur durch die Bildung von direkten Potenzen nach und nach erschöpft werden. Man kann aber jede U_m -Gruppe noch durch andere Gruppen, die keiner Faktorgruppe von U_m isomorph sind, zu grösseren Gruppen erweitern, die sich gleichfalls durch m Elemente erzeugen lassen.

Literatur.

- [1] B.H. Neumann, Identical relations in groups. Math. Ann. 114 (1937), 506 - 525.
- [2] B.H. Neumann und Hanna Neumann, Zwei Klassen charakteristischer Untergruppen und ihre Faktorgruppen. Math. Nachr. 4 (1951), 106 - 125.
- [3] F. Weber, Über die Kennzeichnung von Relationen endlicher Gruppen. Arch. Math. 5 (1954), 326 - 331.
A. G. Kurosch, Gruppentheorie. - Berlin 1953.

Lebenslauf.

Am 29. April 1926 wurde ich als Sohn des Ingenieurs Paul Knoblich und seiner Ehefrau Hedwig, geb. Säuberlich, in Stromberg/Hunsrück geboren. Dort besuchte ich von Ostern 1932 an vier Jahre die Grundschule und anschliessend ein Jahr eine private mittlere Schule. Nach ihrer Auflösung 1937 wurde ich Schüler des Realgymnasiums in Simmern und 1939 der Oberschule für Jungen in Bingen. An dieser Anstalt erhielt ich Anfang 1944 nach Abschluss der Klasse 8 den Reifevermerk, nachdem ich seit Februar 1943 als Luftwaffenhelfer eingesetzt worden war. Auf eine dreimonatige RAD-Zeit folgte im Sommer 1944 meine Einberufung zur Wehrmacht. Ich nahm an der Ardennenoffensive teil und geriet im März 1945 in amerikanische Gefangenschaft. Als ich im Sommer 1946 entlassen wurde, trat ich in die Oberprima des Stefan George-Gymnasiums in Bingen ein und gehörte dieser Klasse bis zur Reifeprüfung im August 1947 an. Vom Wintersemester 1947/48 bis Sommersemester 1951 studierte ich Mathematik und Physik an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz. Im Sommer 1953 legte ich dort die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen ab. Seit Ende 1953 arbeitete ich an vorstehender Dissertation, die Herr Dr. Wever, Mainz, angeregt hat, dem ich für das grosse Interesse, mit dem er ihre Entstehung gefördert hat, zu danken habe. Seit Herbst 1955 bin ich als Mathematiker bei einer Frankfurter Firma beschäftigt.

